Olimpiadi Italiane di Astronomia 2019

INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania

Corso di preparazione alla Finale Nazionale: Categorie **Junior 1** + **Junior 2 + Senior**

Incontro 5: 26 marzo 2019 - A cura di: Giuseppe Cutispoto e Mariachiara Falco

21. KA
La Stazione Spaziale Internazionale (ISS) orbita intorno alla Terra a un'altezza media di h = 412 km e il suo periodo di rivoluzione vale P = 92.62 minuti. Supponete di mettere in orbita la ISS alla stessa altezza dal suolo attorno al pianeta Mercurio. Quanto varrebbe il suo periodo di rivoluzione ?

23. KA
Supponete di comprimere, mantenendo invariata la massa, il Sole e la Terra. A partire da quali dimensioni (Raggio di Schwarzschild) diventerebbero dei buchi neri ? Calcolare le dimensioni del buco nero che si trova al centro della Via Lattea, sapendo che ha una massa $M_{BH} = 3.45 \cdot 10^6\ M_{\odot}$. Esprimere il risultato in km, anni luce, parsec, unità astronomiche e raggi solari.

40. KA
Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un corpo di piccola massa che si muove su un'orbita circolare attorno a una WD con raggio pari a quello della Terra. A che frazione della velocità della luce di muove il corpo?

43. KA
Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza d = 4325 km dalla superfice. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se: a) il satellite si muove da Ovest verso Est; b) il satellite si muove da Est verso Ovest ?

50. KA
Calcolate la posizione del baricentro del sistema Terra-Luna rispetto al centro della Terra.

8. KB
L'asteroide Pallas ha un raggio medio R = 512 km, l'accelerazione di gravità alla sua superfice vale: g = 0.210 m/s^2. Calcolare la densità dell'asteroide in kg/m^3 e in g/cm^3 e la sua velocità di fuga. Calcolare la velocità (v_i) di impatto con l'asteroide di un corpo di piccola massa lasciato cadere, da fermo, da una distanza h = 800 km dalla superficie.

11. KB
Quanto vale la distanza Terra - Marte quando la distanza angolare Marte - Sole è di 60° ? Si consideri per le distanze Terra - Sole e Marte - Sole un valore pari al semiasse maggiore dell'orbita.

14. KB
Determinare il semiasse maggiore dell'orbita di un asteroide che, osservato dalla Terra, ha un periodo sinodico pari al suo periodo siderale. Quanto possono valere, al massimo, l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole all'afelio?

Soluzioni

21. KA

Applichiamo la terza legge di Keplero generalizzata assumendo trascurabile la massa della ISS. Otteniamo: $P = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot (R_{Mercurio}+h)^3}{G \cdot M_{Mercurio}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 2.32 \cdot 10^{19}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.30 \cdot 10^{23}}} = \sqrt{41.6 \cdot 10^6} \cong 6450\ s = 1h\ 47.5m$ *Il periodo sarebbe quindi più lungo anche se l'orbita sarebbe più corta, questo perché Mercurio ha una massa molto minore di quella della Terra*

23. KA

Per un corpo di massa M si definisce "Raggio di Schwarzchild" (o "orizzonte degli eventi") la distanza dal centro dove la velocità di fuga è pari a quella della luce:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_S}} \qquad \text{da cui si ricava: } R_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Per Sole e Terra avremo: $R_{s_\odot} \cong 2960\ m$*;* $R_{sT} \cong 0.886\ cm$*; per il buco nero al centro della Via Lattea il "Raggio di Schwarzchild" vale:*

$$\boldsymbol{R_S} = \frac{2\ \cdot\ 6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \cdot\ 3.45\ \cdot 10^{\,6}\ \cdot\ 1.99\ \cdot\ 10^{30}}{8.99\ \cdot\ 10^{16}} \cong$$

$$1.02\ \cdot\ 10^{10}\ \mathrm{m} = 1.02\ \cdot\ 10^{7}\ \mathrm{km} = 1.08\ \cdot\ 10^{-6}\ \mathrm{al} = 3.31\ \cdot\ 10^{-7}\ \mathrm{pc} = 6.82\ \cdot\ 10^{-2}\ \mathrm{UA} = 14.7\ R_\odot$$

40. KA

Dalla III legge di Keplero il periodo di rivoluzione di un corpo di massa trascurabile intorno a una stella di massa (M) vale: $T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M}}$. Il valore minimo si avrà quando: a = R_{TERRA} e M = 1.44 $M_\odot$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2.594^{20}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 2.87 \cdot 10^{30}}} = 7.31\ \mathrm{s}$$

La lunghezza dell'orbita è: C = 2 π R_{Terra} = 40074 km, la velocità vale: $v = \frac{C}{T} \cong 5480\ \frac{km}{s} \cong 0.0183\ c$

43. KA

La distanza (D) del satellite dal centro della Terra vale: D = 6378 + 4225 = 10703 km. Possiamo ricavare il suo periodo di rivoluzione siderale (T_s*) dalla III legge di Keplero:*

$$T_s = \sqrt{\frac{4\ \cdot \pi^2\ D^3}{G\ \cdot\ M_T}} = \sqrt{\frac{39.478\ \cdot 1.2261\ \cdot\ 10^{21}}{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \cdot 5.97\ \cdot\ 10^{24}}} \cong 11000\ s \cong 3h\ 3m$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di uno stesso luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico (S) riferito alla rotazione siderale della Terra (T_T *= 23h 56m 4s = 86164 s). Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra si ha:*

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_T} \quad \textit{ovvero: } \quad \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\,\boldsymbol{T_s - T_T}\,|} \quad \text{da cui ricaviamo: } S \cong 12600\ s \cong 3h\ 30m$$

Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero nella direzione opposta della rotazione della Terra:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_S} + \frac{1}{T_T} \quad \textit{ovvero: } \quad \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\,\boldsymbol{T_s + T_T}\,|} \quad \text{da cui ricaviamo: } S \cong 9750\ s \cong 2h\ 43m$$

50. KA

Dalla definizione di baricentro dette M_T *e* M_L *le masse della Terra e della Luna e* a_T *e* a_L *le distanze del centro dei due corpi dal baricentro, vale la relazione:* $M_T\ \cdot\ a_T = M_L\ \cdot\ a_L$

da cui ricaviamo: $a_L = \frac{M_T \cdot a_T}{M_L}$ *ed essendo inoltre* $a = a_T + a_L$ *otteniamo:*

$a_T + \frac{M_T \cdot a_T}{M_L} = a$ *e quindi:* $a_T = \frac{a}{1+\frac{M_T}{M_L}} = \frac{384.4 \cdot 10^3}{1+\frac{5.97 \cdot 20^{24}}{7.35 \cdot 10^{22}}} \cong 4680\ km$

Il baricentro del sistema Terra-Luna si trova quindi all'interno della Terra

8. KB

L'asteroide ha un volume pari a: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 56.2 \cdot 10^7\ km^3 = 56.2 \cdot 10^{16}\ m^3$*. Nota l'accelerazione di gravità alla sua superfice ricaviamo la massa:* $M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{0.210 \cdot 2.62 \cdot 10^{11}}{6.674 \cdot 10^{-11}} \cong 8.24 \cdot 10^{20}\ kg$

e la densità: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{8.25 \cdot 10^{20}}{56.2 \cdot 10^{16}} \cong 1470\ \frac{kg}{m^3} = 1.47\ \frac{g}{cm^3}$

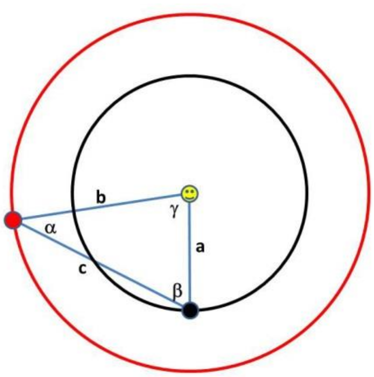
La velocità di fuga dall'asteroide vale: $v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}}{512000}} \cong 463\ \frac{m}{s} = 0.463\ \frac{km}{s}$

La distanza da cui cade il corpo è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni dell'asteroide. Dalla conservazione dell'energia meccanica posto H = h + R = 1312 km ed essendo $v_0 = 0$*, si avrà:*

$$\frac{1}{2}\,m\,v_i^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

Da cui : $v_i = \sqrt{2\,G\,M\left(\frac{H-R}{HR}\right)} = \sqrt{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 8.24 \cdot 10^{20}\left(\frac{800 \cdot 10^3}{1312 \cdot 10^3 \cdot 512 \cdot 10^3}\right)} \cong 362\ \frac{m}{s}$

11. KB



Utilizziamo la relazione che lega tra di loro i lati e gli angoli di un triangolo qualsiasi (Teorema dei seni o Teorema di Eulero):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Poiché a = 1 UA, b = 1.523 UA e β = 60° avremo:

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1.523}{0.8660}$$

da cui ricaviamo α = 34°.65 e γ = 85°.35.
Avremo infine:
$\frac{1}{0.5686} = \frac{c}{0.9967}$ *da cui: c = 1.753 UA = 262.2* $\cdot 10^6$ *km*

14. KB

Le relazioni che legano il Periodo Sinodico (S) di un corpo del Sistema Solare osservato dalla Terra con il suo Periodo Siderale (P) e con il Periodo Siderale della Terra (E) sono:

$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$ *(corpo esterno all'orbita della Terra)* $\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E}$ *(corpo interno all'orbita della Terra)*

Se S = P notiamo che l'asteroide non può essere interno all'orbita della Terra; varrà allora solo la relazione: $\frac{1}{P} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P}$ *da cui: P = 2E = 2 anni. Noto il periodo siderale ricaviamo il semiasse maggiore (a) dalla III legge di Keplero: a =* $\sqrt[3]{P^2} = 1.587\ UA = 237.4 \cdot 10^6\ km.$
Per ricavare la massima distanza all'afelio (D_A) *calcoliamo l'eccentricità massima dell'orbita, considerando che la distanza al perielio* (D_P) *non può essere minore del raggio del Sole.*
Poiché $D_p = R_\odot$ *= a (1-e), ricaviamo:* $e = 1 - \frac{R_\odot}{a} = 1 - \frac{695475}{237.4 \cdot 10^6} = 0.9971$
Si avrà infine: D_A *= a (1+e) = 474.1* $\cdot 10^6$ *km*