Olimpiadi Italiane di Astronomia 2018, INAF - Osservatorio Astrofisico di Catania
Corso di preparazione alla Finale Nazionale - Incontro 2: **29 Marzo 2018**
A cura di: Giuseppe Cutispoto e Mariachiara Falco

2. KA
Disegnate un ellisse con eccentricità e = 0.812 e con coordinate di uno dei fuochi f = (6.00 UA, 0 UA). Calcolate l'area dell'ellisse in UA^2 e in km^2.

25. KA
Sono state osservate due opposizioni consecutive di un pianeta esterno. L'intervallo di tempo tra i due eventi è di 398.88 giorni. Di che pianeta si tratta ?

35. KA
Kepler-78b, scoperto nel 2013, è stato il primo pianeta extrasolare con massa (M) e raggio (R) simili a quelli della Terra. In particolare $M = 5.32 \cdot 10^{-3}\ M_{Giove}$ e $R = 0.107\ R_{Giove}$. Calcolare la densità del pianeta in g/cm^3.

44. KA
Calcolare le dimensioni angolari (diametro apparente) del Sole quando la Terra si trova all'afelio e al perielio. Confrontate questi valori con quelli delle dimensioni angolari della Luna al perigeo e all'apogeo

45. KA
Calcolate, in km/s, la velocità orbitale della Luna intorno alla Terra al perigeo e all'apogeo e la velocità orbitale della Terra intorno al Sole al perielio e all'afelio.

46. KA
Un punto sull'equatore di Giove si muove con una velocità tangenziale v = 12.57 km/s. A che altezza dalla superfice dovete porre un satellite artificiale in orbita equatoriale attorno a Giove affinché esso risulti "Giove-stazionario"?

47. KA
Le stelle di neutroni sono corpi estremamente densi e in rapida rotazione. Consideriamo una di tali stelle con raggio R = 15 km e $P_{rot} = 1.4 \cdot 10^{-3}$ s. Quale massa minima deve avere per attrarre gli oggetti all'equatore sulla sua superficie altrimenti espulsi a causa della rotazione ? Esprimere il risultato in masse solari. Calcolare la velocità tangenziale all'equatore di questa stella. Perché una stella di neutroni ruota così velocemente ?

48. KA
Si consideri una stella di neutroni con massa pari al doppio di quella del Sole e raggio R = 15 km. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superfice, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza h = 2 m dalla superfice, il tempo di caduta del corpo. Quanto pesa sulla superfice della Terra 1 cm^3 di materia della stella di neutroni ? Quanto dovrà essere grande un cubo di ferro ($\rho_{FE} = 7870\ kg/m^3$) per avere la stessa massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni ?

4. KB
Intorno a una stella a 10 a.l. dal Sole è stato scoperto un corpo di massa $M_a = 6.5 \cdot 10^{24}$ kg, che percorre intorno ad essa in 20 anni un'orbita circolare, perpendicolare alla direzione di osservazione e il cui semiasse maggiore sottende un angolo $\alpha = 4''.89$. Di che tipo di corpo si tratta, una stella, una nana bruna o un pianeta ? Si calcoli la massa della stella in unità di masse solari. Quanto varrebbe il periodo di rivoluzione del corpo se orbitasse intorno al Sole ?

11. KB
Quanto vale la distanza Terra - Marte quando la distanza angolare Marte - Sole è di 60° ? Si consideri per le distanze Terra - Sole e Marte - Sole un valore pari al semiasse maggiore dell'orbita.

16. KB
Calcolate il periodo di rivoluzione e la velocità tangenziale di un corpo che si muove su un'orbita circolare a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi di un buco nero con massa M = 2.51 $M_\odot$.

Soluzioni

2. KA
Poiché e = c/a ricaviamo a = 7.39 UA. Inoltre, essendo $c^2 = a^2 - b^2$ *si avrà: b = 4.31 UA. L'area di una ellisse è data dalla relazione A =* π *a b. Quindi nel nostra caso A = 100* UA^2 *= 2.24 ·* 10^{18} km^2

25. KA
L'intervallo tra due opposizioni consecutive è pari al periodo sinodico (P). Detto "E" il periodo siderale della Terra e "S" il periodo siderale del pianeta vale la relazione: $P = \frac{E \cdot S}{|E-S|} = \frac{365.26 \cdot 398.88}{33.62} = 4334\ giorni = 11.86\ anni$*. Si tratta quindi del pianeta Giove.*

35. KA
La Massa e il raggio del pianeta valgono: M = 1.01 · 10^{25} *kg, R = 7650 km. La densità (*ρ*) è data dal rapporto tra massa e volume. Nella ragionevole ipotesi che il pianeta abbia forma sferica si avrà:* $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1.01 \cdot 10^{25}\ kg}{4.19 \cdot 4.48 \cdot 10^{11}\ km^3} \cong\ 5.38\ \cdot\ 10^{12}\ \frac{kg}{km^3} =\ 5.38\ \cdot\ 10^{3}\ \frac{kg}{m^3} = 5.38\ \frac{g}{cm^3}$

44. KA
Le distanze della Terra all'afelio e al perielio valgono: $d_{A\odot}$ *= a(1+e) = 152.1 ·* 10^6 *km,* $d_{P\odot}$ *= a(1-e) = 147.1 ·* 10^6 *km. Le dimensioni angolari minime* $(D_{A\odot})$ *e massime* $(D_{P\odot})$ *del Sole valgono:*

$$D_{A\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot}{d_{A\odot}}\right) = 31'.44 \qquad e \qquad D_{P\odot} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_\odot}{d_{P\odot}}\right) = 32'.51$$

Le distanze della Luna all'apogeo e al perigeo valgono: d_{AL} *= a(1+e) = 405.7 ·* 10^3 *km,* d_{PL} *= a(1-e) = 363.1 ·* 10^3 *km. Le dimensioni angolari minime* (D_{AL}) *e massime* (D_{PL}) *della Luna valgono:*

$$D_{AL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{d_{AL}}\right) = 29'.45 \qquad e \qquad D_{PL} = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{R_L}{d_{PL}}\right) = 32'.91$$

Notiamo che quando la Luna si trova all'apogeo la sua dimensione angolare è sempre minore di quella del Sole anche quanto la Terra è all'afelio, mentre quando la Luna si trova al perigeo la sua dimensione angolare è sempre maggiore di quella del Sole anche quando la Terra è al perielio.

45. KA
Calcoliamo la media delle velocità lungo l'orbita per la Luna, che è data dalla relazione: $v_{mL} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{a}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}{384.4 \cdot 10^6}} \cong 1.02\ \frac{km}{s}$*. La velocità al perielio vale quindi:* $v_{pL} = v_{mL}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cong 1.08\ \frac{km}{s}$*, mentre per la velocità all'afelio avremo:* $v_{aL} = v_{mL}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cong 0.965\ \frac{km}{s}$*. Per la Terra, in modo del tutto analogo,*

avremo: $v_{mT} = \sqrt{\frac{G\,M_{\odot}}{a}} = \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.99 \cdot 10^{30}}{149.6 \cdot 10^{9}}} \cong 29.8\ \frac{km}{s}$. *La velocità al perielio vale quindi:* $v_{pT} = v_{mT}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cong 30.3\ \frac{km}{s}$, *mentre per la velocità all'afelio avremo:* $v_{aT} = v_{mT}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cong 29.3\ \frac{km}{s}$.

46. KA

La velocità tangenziale all'equatore (v_T) è legata al periodo di rotazione (T) dalla relazione:

$$T = \frac{2\,\pi\,R}{v_T} = \frac{449.20 \cdot 10^3}{12.57} \cong 35740\ s \ \cong 9.928\ h$$

Dalla III Legge di Keplero, assumendo l'orbita circolare, ricaviamo da distanza (D) del satellite dal centro di Giove:

$$D = \sqrt[3]{\frac{G\ M\ T^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.90 \cdot 10^{27} \cdot 127.7 \cdot 10^7}{39.48}} = \sqrt[3]{4.08 \cdot 10^{24}} \cong 160000 \cdot 10^3\ m = 1600000\ km$$

e sottraendo il raggio di Giove, la distanza d dalla superficie vale: d = D – 71493 ≅ 88500 km

47. KA

Per impedire che un corpo con massa "m" sfugga a causa della rotazione, la forza di gravità deve essere almeno uguale alla forza centrifuga. Quindi all'equatore della stella deve essere:

$$F_g = \frac{G\ M\ m}{R^2} \geq m\,\omega^2 R = \frac{4\,\pi^2\ m\ R}{T^2}$$

da cui ricaviamo: $M \ \geq \frac{4\,\pi^2\ R^3}{G\ T^2} = \frac{39.48 \cdot 3.375 \cdot 10^{12}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.96 \cdot 10^{-6}} \cong 1.02 \cdot 10^{30}\ kg \ \cong\ 0.51\ M_{\odot}$

Nota: *quello ottenuto per la massa è un valore minimo, le masse delle stelle di neutroni sono comprese tra circa 1.5* $M_{\odot}$ *e circa 3* $M_{\odot}$.

La velocità tangenziale all'equatore è data dalla relazione: $v_t = \frac{2\,\pi\,R}{T} = \frac{94.25}{1.4 \cdot 10^{-3}} \cong 67320\ \frac{km}{s} \cong 0.22\ c$.

Una stella di neutroni è il resto di una stella di grande massa (>8 $M_{\odot}$*) esplosa come supernova. Prima di esplodere la stella era una gigante o supergigante. La conservazione del momento angolare (anche se in realtà nel corso dell'esplosione gran parte del momento angolare viene perso) fa si che la stella di neutroni abbia un periodo di rotazione estremamente breve.*

48. KA

La densità media è data da: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\ M}{4\,\pi\,R^3} = \frac{3 \cdot 3.98 \cdot 10^{30}}{12.57 \cdot 3.375^{12}} \cong 2.81 \cdot 10^{17}\ \frac{kg}{m^3} \cong 2.81 \cdot 10^{11}\ \frac{kg}{cm^3}$

L'accelerazione di gravità sulla superfice è data da:

$$a_g = \frac{G\ M}{R^2} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.98 \cdot 10^{30}}{225 \cdot 10^6} \cong 1.18 \cdot 10^{12}\ \frac{m}{s^2}$$

La velocità di arrivo al suolo, con partenza da fermo, assumendo costante l'accelerazione di gravità e:

$$v = \sqrt{2\ a_g\ h} = \sqrt{2 \cdot 1.18 \cdot 10^{12} \cdot 2} \cong 2.17 \cdot 10^6\ \frac{m}{s} = 2.17 \cdot 10^3\ \frac{km}{s}$$

Il tempo della caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2\ h}{a}} = \sqrt{\frac{4}{1.18 \cdot 10^{12}}} \cong 1.84 \cdot 10^{-6}\ s$$

La massa di 1 cm^3 *di materia della stella di neutroni vale:* $M = V\,\rho = 2.81 \cdot 10^{11}\ kg$, *il suo peso sulla superfice della Terra è:* $P = M\ a_g \cong 2.81 \cdot 10^{11} \cdot 9.807 \cong 27.6 \cdot 10^{11}\ N$

Poiché 1 m^3 *di ferro ha una massa di 7870 kg, per avere una massa* $M_{FE} = 2.81 \cdot 10^{11}\ kg$, *avremo bisogno di un cubo con lato:* $L = \sqrt[3]{\frac{2.81 \cdot 10^{11}}{7870}} \cong 329\ m$

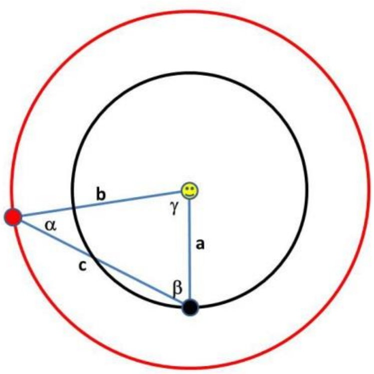
4. KB

Il limite inferiore per la massa delle Brown Dwarf (le stelle più piccole che possono esistere) è: M_{BD} = $0.012\ M_{\odot} = 12 \cdot 10^{-3}\ M_{\odot}$. *Poiché* $M_A = 6.5 \cdot 10^{24}$ kg $= 3.27 \cdot 10^{-6}\ M_{\odot}$, *il corpo è sicuramente un pianeta. L'orbita è perpendicolare alla direzione di osservazione e quindi il suo semiasse maggiore (a) si ricava dalla relazione:* $a = D \cdot \tan\alpha = 9461 \cdot 10^{10} \cdot \tan\frac{4.89}{3600} \cong 224.3 \cdot 10^{7}\ km$. *Detta* M_s *la massa della stella, alla III Legge di Keplero ricaviamo:*

$$M_s + M_a = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot 1.13 \cdot 10^{37}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.98 \cdot 10^{17}} \cong 1.68 \cdot 10^{31}\ kg = M_s = 8.44\ M_{\odot}$$

La distanza pianeta-stella è pari a 14.99 UA, se il pianeta ruotasse intono al Sole il suo periodo (T) varrebbe: $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{3368} \cong 58\ anni$

11. KB



Utilizziamo la relazione che lega tra di loro i lati e gli angoli di un triangolo qualsiasi (Teorema dei seni o Teorema di Eulero):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Poiché a = 1 UA, b = 1.523 UA e $\beta = 60°$ *avremo:*

$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1.523}{0.8660}$$

da cui ricaviamo $\alpha = 34°.65$ *e* $\gamma = 85°.35$.

Avremo infine:

$\frac{1}{0.5686} = \frac{c}{0.9967}$ *da cui: c = 1.753 UA =* $262.2 \cdot 10^{6}$ *km*

16. KB

Per un buco nero con massa pari a 2.51 $M_{\odot}$ *il "Raggio di Schwarzchild" vale:*

$$R_s = \frac{2\,G\,2.51\,M_{\odot}}{c^2} = \frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}}{8.988 \cdot 10^{16}} \cong 7410\ m = 7.41\ km$$

Utilizzando la III Legge di Keplero, con a = 17410 m, il periodo di rivoluzione risulta:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2\,a^3}{G\,2.51 \cdot M_{\odot}}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 5.277 \cdot 10^{12}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 4.99 \cdot 10^{30}}} \cong 8.55 \cdot 10^{-3}\ s$$

Con tale periodo la velocità di rivoluzione risulta:

$$v = \frac{2\,\pi\,R}{T} = \frac{109.4}{8.55 \cdot 10^{-3}} \cong 12800\ \frac{km}{s} \cong 0.043\ c$$

Nota: nella soluzione stiamo assumendo che le leggi di Keplero siano valide a 10 km di distanza dall'orizzonte degli eventi del buco nero. La soluzione rigorosa del problema richiederebbe l'uso di relazioni derivate dalla Relatività generale.