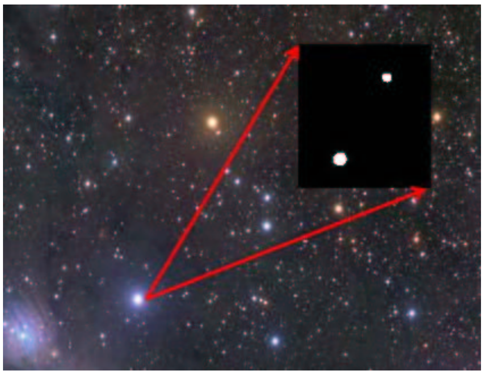
OLIMPIADI ITALIANE DI ASTRONOMIA 2009

GARA INTERREGIONALE

SOLUZIONI DEI PROBLEMI

Categoria SENIOR

Problema 1. Un sistema binario non risolto è costituito da una stella di luminosità costante e da una stella variabile. Se venissero osservate singolarmente, la magnitudine apparente della stella di luminosità costante sarebbe pari a $m_c = 4.00$ mentre la magnitudine della stella variabile oscillerebbe tra $m_1 = 5.00$ e $m_2 = 4.00$. Si calcolino le magnitudini apparenti del sistema binario quando la stella variabile è al massimo e quando è al minimo di luminosità.



Soluzione. *Si deve applicare la Legge di Pogson, secondo cui la magnitudine m è legata al flusso F dalla relazione*

$$m = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}\left(\frac{F}{F_0}\right) \qquad da \quad cui \qquad F = F_0 \cdot 10^{-0.4(m-m_0)}$$

essendo m_0 ed F_0 delle grandezze di riferimento (che, come si vedrà, si semplificano nel calcolo). Possiamo dunque calcolare i flussi corrispondenti alle magnitudini fornite dal problema:

$$m_c = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}\left(\frac{F_c}{F_0}\right) \qquad da \quad cui \qquad F_c = F_0 \cdot 10^{-0.4(m_c-m_0)}$$

$$m_1 = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}\left(\frac{F_1}{F_0}\right) \qquad da \quad cui \qquad F_1 = F_0 \cdot 10^{-0.4(m_1-m_0)}$$

$$m_2 = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}\left(\frac{F_2}{F_0}\right) \qquad da \quad cui \qquad F_2 = F_0 \cdot 10^{-0.4(m_2-m_0)}$$

Al minimo di luminosità della stella variabile, il flusso complessivo sarà dato da $F_{MIN} = F_c + F_1$, mentre al massimo esso sarà dato da $F_{MAX} = F_c + F_2$. Le magnitudini corrispondenti saranno ricavabili ancora applicando la legge di Pogson:

$$m_{MIN} = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_{MIN}}{F_0}) = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_C + F_1}{F_0}) =$$

$$= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4(m_c - m_0)} + 10^{-0.4(m_1 - m_0)}) =$$

$$= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10} 10^{0.4 m_0} - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4 m_c} + 10^{-0.4 m_1}) =$$

$$= m_0 - m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4 \cdot 4} + 10^{-0.4 \cdot 5}) =$$

$$= -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}02512 + 0.01) = -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}03512) = 3.64$$

$$m_{MAX} = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_{MAX}}{F_0}) = m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(\frac{F_C + F_2}{F_0}) =$$

$$= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4(m_c - m_0)} + 10^{-0.4(m_2 - m_0)}) =$$

$$= m_0 - 2.5 \cdot \log_{10} 10^{0.4 m_0} - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4 m_c} + 10^{-0.4 m_2}) =$$

$$= m_0 - m_0 - 2.5 \cdot \log_{10}(10^{-0.4 \cdot 4} + 10^{-0.4 \cdot 4}) =$$

$$= -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}02512 + 0.02512) = -2.5 \cdot \log_{10}(0{,}05024) = 3.25$$

La magnitudine complessiva del sistema varia dunque tra 3.25 al massimo e 3.64 al minimo.

Problema 2. La magnitudine apparente di Sirio è m = -1,46. Se la sua distanza fosse 1000 volte più grande, Sirio sarebbe ancora visibile ad occhio nudo?

Soluzione. *La relazione da usare è*

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

Se la distanza aumentasse di 1000 volte avremmo quindi

$$\left(\frac{d_2}{d_1} \right) = \frac{1000 d_1}{d_1} = 10^3$$

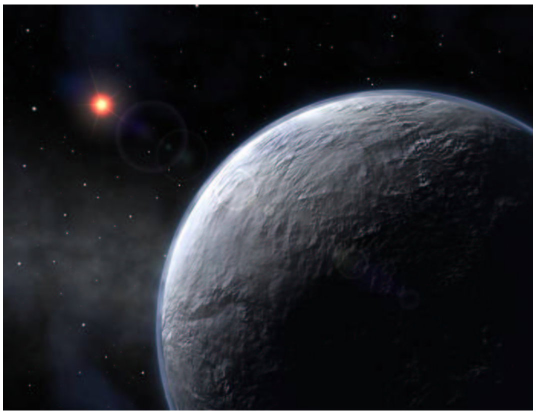
e sostituendo:

$$-1.46 - m_2 = -2.5 \log 10^6 = -15$$

da cui $m_2 = -1.46 + 15 = 13.34$.

Quindi Sirio non sarebbe più visibile ad occhio nudo (che non riesce a vedere stelle più deboli, all'incirca, della 6^a *magnitudine).*

Problema 3. Vi trovate sulla superficie di un pianeta sconosciuto che ha lo stesso raggio della Terra. Osservate che lasciando cadere un corpo verso il basso questo percorre 18.34 metri in 0.5 secondi. Determinate la massa del pianeta sconosciuto in kg sapendo che la massa della Terra vale M_T = 5.97 x 10^{24} kg. Sapendo inoltre che sulla Terra la densità dell'Uranio è di circa 19 g/cm^3 e quella dell'Osmio (l'elemento più denso presente in natura) è di circa 22.6 g/cm^3, da cosa pensate possa essere costituito il pianeta sconosciuto ?



Soluzione. *Il corpo lasciato cadere verso il basso ha un moto uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, e segue quindi la legge*

$$s = \frac{1}{2} g_{PIANETA} \cdot t^2 \qquad da \quad cui \qquad g_{PIANETA} = \frac{2s}{t^2}$$

Con i dati del problema (s=18.34 m, t=0.5 s) si ricava quindi l'accelerazione di gravità alla superficie del pianeta sconosciuto $g_{PIANETA}$=146.7 m/s^2. Confrontata con l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre (g_{TERRA}=9.81 m/s^2) si vede che $g_{PIANETA}=15 \cdot g_{TERRA}$.
Per la legge di gravitazione universale, le espressioni di $g_{PIANETA}$ e g_{TERRA} sono date da

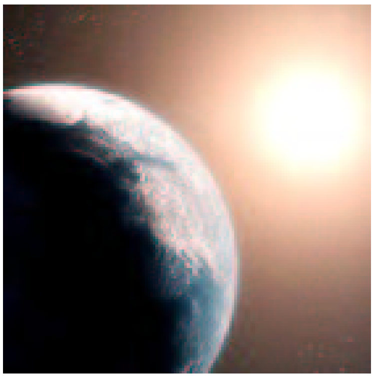
$$g_{TERRA} = G \frac{M_{TERRA}}{R^2_{TERRA}}$$

e quindi, essendo il raggio del pianeta uguale a quello terrestre, si può ricavare la massa del pianeta in termini di quella terrestre:

$$M_{PIANETA} = \frac{R^2_{PIANETA}}{G} g_{PIANETA} = \frac{R^2_{PIANETA}}{G} \cdot 15 \cdot g_{TERRA} = \frac{R^2_{PIANETA}}{G} \cdot 15 \cdot G \frac{M_{TERRA}}{R^2_{TERRA}} = 15 \cdot M_{TERRA}$$

La massa del pianeta sconosciuto è dunque di 8.93 x 10^{25} kg. Poiché il volume del pianeta è evidentemente uguale a quello della Terra (per via dei raggi uguali!) anche la sua densità risulterà 15 volte maggiore di quella della Terra e vale circa 82.8 g/cm^3. Il pianeta sconosciuto non può essere interamente costituito da materia ordinaria: dobbiamo quindi supporre, ad esempio, che buona parte del suo interno sia costituita da materia allo stato "degenere".

Problema 4. Il Sole illumina la Terra e gli altri pianeti con la sua luce, sia essa visibile o non visibile. Un pianeta che si trovasse a distanza dal Sole doppia di quella della Terra, riceverebbe più o meno energia luminosa dal Sole? Spiegate perché. Nel precisare la risposta, si tenga conto che il Sole emette la sua luce in tutte le direzioni e non solo sul piano del Sistema Solare.



Soluzione. *Il flusso luminoso proveniente dal Sole diminuisce in ragione inversa del quadrato della distanza da esso. Pertanto un pianeta che si trovasse a distanza dal Sole doppia di quella della Terra riceverebbe meno energia luminosa, e precisamente un quarto di quella ricevuta alla distanza della Terra.*

Problema 5. Calcolare la distanza media tra due stelle di una galassia e mostrare che essa è molto più grande del diametro di una stella.

Si assuma che:

a) la galassia abbia una simmetria sferica;
b) il numero di stelle della galassia sia $N = 10^{11}$;
c) il diametro della galassia sia: $D_{gal} = 30$ Kpc;
d) il diametro tipico di una stella all'interno della galassia sia $D_{Star} = 1.4 \times 10^{11}$ cm.

Soluzione. *Il volume della galassia è pari a*

$$V_{GAL} = \frac{4}{3}\pi R_{GAL}^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_{GAL}}{2}\right)^3 = 1.4137 \cdot 10^{13}\ pc^3$$

Poiché in questo volume si trovano N stelle, è come se ciascuna stella, in media, fosse al centro di un cubo il cui volume è dato dalla quantità

$$V_{STELLA} = \frac{V_{GAL}}{N} = 141.37\ pc^3$$

La radice cubica di questo volume dà quindi il lato ℓ del cubo che contiene la stella. Essa disterà evidentemente dai lati del cubo di una quantità pari a $\ell/2$: per avere la distanza media $<d>$ tra due stelle, quindi, bisogna moltiplicare questa quantità per 2 e si riottene in definitiva $<d>=\ell$.

Nel nostro caso avremo

$$\langle d \rangle = \ell = \sqrt[3]{V_{STELLA}} = 5.209\ pc$$

Ora, poiché

$$1\ pc = 206264.81\ U.A. = 206264.81 \times 1.49 \cdot 10^{8}\ Km = 3.073 \cdot 10^{13}\ Km = 3.073 \cdot 10^{18}\ cm$$

se ne conclude che

$$<d> = 1.6 \cdot 10^{19}\ cm \cong 1.14 \cdot 10^{8}\ D_{Star}$$

cioè la distanza media tra due stelle è oltre 100 milioni di volte superiore alle dimensioni tipiche di una stella. Ciò spiega perché all'interno di una galassia le stelle non si urtano, pur essendo moltissime (nel nostro caso, 100 miliardi).

Alternativamente *si può supporre che il volume occupato da ciascuna stella sia sferico. In tal caso il raggio r della sfera occupata da ciascuna stella è legato al volume V_{STELLA} dalla relazione*

$$V_{STELLA} = \frac{4}{3}\pi r^{3} \qquad \text{da cui} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3V_{STELLA}}{4\pi}} = 3.232\ pc$$

La distanza media <d> tra due stelle sarà pari alla distanza tra i centri di due sfere adiacenti, e cioè pari alla somma dei raggi. Nel nostro caso i raggi sono uguali, e si ottiene

$$<d> = 2r = 6.464\ pc$$

Si vede che il risultato, pur diverso da quello calcolato con l'ipotesi di un volume cubico, è dello stesso ordine di grandezza e non cambia la risposta al problema. In questo caso infatti si avrebbe

$$<d> = 2.0 \cdot 10^{19}\ cm \cong 1.43 \cdot 10^{8}\ D_{Star}$$

e si ritroverebbe ancora che la distanza media tra due stelle è oltre 100 milioni di volte superiore alle dimensioni tipiche di una stella.