Olimpiadi Italiane di Astronomia 2018, INAF - Osservatorio Astrofisico di Catania
Corso di preparazione alla Finale Nazionale - Incontro 1: **22 Marzo 2018**
A cura di: Giuseppe Cutispoto e Mariachiara Falco

8. KA
L'orbita di un asteroide ha semiasse maggiore di 7.143 UA e semiasse minore di 2.635 UA. Calcolate l'eccentricità dell'orbita e la distanza dell'asteroide dal Sole al perielio e all'afelio. Supponendo che l'asteroide orbiti in prossimità del piano dell'eclittica, quali sono i pianeti con cui potrebbe entrare in collisione ? Questo asteroide fa parte della "Fascia degli Asteroidi" ?

17. KA
Supponete di raddoppiare la massa del Sole. Calcolate il nuovo periodo di rivoluzione della Terra mantenendo inalterato il valore dell'UA. Se la massa di Mercurio raddoppiasse, quale sarebbe il suo nuovo periodo di rivoluzione supponendo invariato il semiasse maggiore dell'orbita?

23. KA
Supponete di comprimere, mantenendo invariata la massa, il Sole e la Terra. A partire da quali dimensioni (Raggio di Schwarzschild) diventerebbero dei buchi neri ? Calcolare le dimensioni del buco nero che si trova al centro della Via Lattea, sapendo che ha una massa $M_{BH} = 3.45 \cdot 10^6\ M_\odot$. Esprimere il risultato in km, anni luce, parsec, unità astronomiche e raggi solari.

36. KA
Un astronauta, il cui peso sulla Terra è di 686.7 N, si trova sulla superfice di un pianeta e lasciando cadere un oggetto misura che per percorrere 5.41 m esso impiega 1.01 secondi. La lunghezza dell'equatore del pianeta, supposto sferico, è pari a $36.57 \cdot 10^3$ km. Quanto vale la massa del pianeta e quanto pesa, trascurando gli effetti dovuti alla rotazione, l'astronauta sul pianeta ?

37. KA
La stella Kepler-101 ha due pianeti, Kepler-101b (gassoso) e Kepler-101c (roccioso). Calcolare l'accelerazione di gravità alla superficie dei due pianeti, sapendo che Kepler-101b ha un raggio $R_b = 0.52 \cdot R_{Giove}$ e una massa $M_b = 51 \cdot M_{Terra}$ e che Kepler-101c ha un raggio $R_c = 1.23 \cdot R_{Terra}$ e una massa $M_c = 0.012 \cdot M_{Giove}$. A quale altezza dalla superfice di Kepler-101c si avrà un'accelerazione di gravità pari a quella sulla superfice di Kepler-101b?

38. KA
Nel 1968, Apollo 8 è stata la prima missione della NASA con equipaggio umano a entrare in orbita lunare, dove rimase per 20 ore, compiendo 10 orbite circolari complete prima di rientrare a Terra. Calcolate la distanza dalla superficie della Luna della navicella Apollo 8 durante le sue orbite e la sua velocità orbitale.

39. KA
Calcolate il minimo periodo di rivoluzione di un corpo di piccola massa che si muove su un'orbita circolare attorno a una WD con raggio pari a quello della Terra. A che frazione della velocità della luce di muove il corpo?

40. KA
Calcolate la velocità al perielio di un asteroide con semiasse maggiore dell'orbita a = 1.262 UA e eccentricità e = 0.2080

42. KA
Un satellite artificiale ruota attorno alla Terra, che assumiamo perfettamente sferica, su un'orbita equatoriale circolare a una distanza d = 4325 km dalla superfice. Un osservatore lo vede passare al meridiano a mezzanotte. Dopo quanto tempo lo vedrà passare nuovamente al meridiano se: a) il satellite si muove da Ovest verso Est; b) il satellite si muove da Est verso Ovest ?

43. KA
Supponete che la massa del Sole si riduca a $M_\odot = 1.00 \cdot 10^{30}$ kg. Mantenendo inalterati il periodo di rotazione della Terra e il semiasse maggiore dell'orbita, da quanti giorni sarebbe formato un anno ? Quanto varrebbero, in km, un parsec e un anno luce ?

2. KB
La stella Castore (= α Gem) ha una parallasse di 0".0761 ed è un sistema binario visuale con periodo di rivoluzione di 306 anni. Il semiasse maggiore dell'orbita delle componenti forma un angolo di 90° rispetto alla direzione di osservazione e le sue dimensioni angolari sono β = 6". Determinare la somma delle masse delle due componenti in unità della massa del Sole.

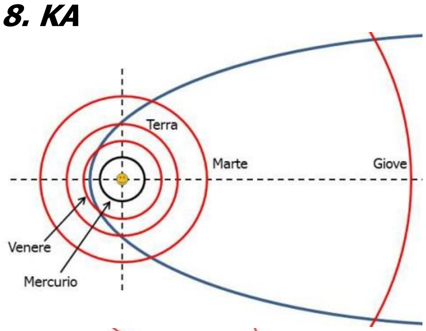
3. KB
Schematizzando la Galassia come un disco di 10^5 anni luce di diametro e spessore trascurabile, si fornisca una stima della sua massa totale in masse solari, sapendo che il Sole si trova a una distanza dal centro d = 8kpc e assumendo per l'anno galattico un valore T = $250 \cdot 10^6$ anni

17. KB
Una piccola galassia a spirale ha una magnitudine assoluta integrata M_T = -20.17. Stimate, in prima approssimazione, la velocità di fuga per un oggetto posto sul piano galattico della galassia alla distanza di 200.000 anni luce dal centro.

19. KB
Una massa "M" viene divisa in due parti di massa "m" e "M-m", che vengono allontanate a una distanza "d". Trovare il rapporto m/M che rende massima la forza gravitazionale tra le due parti.

Soluzioni

8. KA



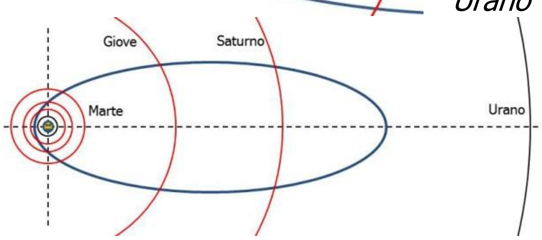
Dalle dimensioni dei semiassi: $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2}{a^2}\right)} = 0.9295.$

Le distanze dal Sole al perielio e all'afelio valgono:

$d_{Perielio} = a(1-e) = 0.5036$ *UA*

$d_{Afelio} = a(1+e) = 13.78$ *UA*

La distanza dei pianeti dal Sole in UA è circa: Mercurio = 0.4, Venere = 0.7, Terra = 1, Marte = 1.5, Giove = 5.2; Saturno = 9.5, Urano = 19.6, Nettuno = 30



L'asteroide potrebbe incrociare le orbite dei pianeti con distanza dal Sole: 0.5036 UA < D < 13.78 UA, cioè Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno.

La "Fascia degli Asteroidi" è compresa tra le orbite di Marte e di Giove, l'asteroide non ne fa parte.

17. KA
Dalla III Legge di Keplero, detto T_1 il nuovo periodo di rivoluzione della Terra, avremo nei due casi:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_\odot + M_{Terra})}{4\,\pi^2} \qquad e \qquad \frac{a^3}{T_1^2} = \frac{G\,(2M_\odot + M_{Terra})}{4\,\pi^2}$$

La massa della Terra è trascurabile rispetto a quella del Sole e dividendo membro a membro si ha:

$$\frac{T_1^2}{T^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{da cui otteniamo:} \qquad T_1 = T\sqrt{0.5} \cong 0.7071\, anni \cong 258.3\, g$$

Raddoppiando la massa di Mercurio il suo periodo di rivoluzione rimarrebbe praticamente invariato. Infatti, anche raddoppiata la massa di Mercurio resterebbe trascurabile rispetto a quella del Sole.

23. KA

Per un corpo di massa M si definisce "Raggio di Schwarzchild" (o "orizzonte degli eventi") la distanza dal centro dove la velocità di fuga è pari a quella della luce:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R_S}} \qquad \text{da cui si ricava:} \quad R_s = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Per Sole e Terra avremo: $R_{s_\odot}$ = 2950 m; R_{sT} = 0.886 cm; per il buco nero al centro della Via Lattea il "Raggio di Schwarzchild" vale:

$$\boldsymbol{R_S} = \frac{2\,\cdot\,6.674\,\cdot\,10^{-11}\,\cdot\,3.45\,\cdot 10^{\,6}\,\cdot\,1.99\,\cdot\,10^{30}}{8.99\,\cdot\,10^{16}} =$$

$$1.02\,\cdot\,10^{10}\ \text{m} = 1.02\,\cdot\,10^{7}\ \text{km} = 1.08\,\cdot\,10^{-6}\ \text{al} = 3.31\,\cdot\,10^{-7}\ \text{pc} = 6.82\,\cdot\,10^{-2}\ \text{UA} = 14.7\,R_\odot$$

36. KA

La caduta libera del corpo segue la legge del moto uniformemente accelerato:

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \qquad \textit{da cui ricaviamo:} \quad g = \frac{2\cdot s}{t^2} = \frac{10.82}{1.02} = 10.6\ \text{m/s}^2$$

Il raggio del pianeta vale: R = 5.82 · 10^6 m. La massa del pianeta è data dalla relazione:

$$M = g\,\frac{R^2}{G} = \frac{10.6\,\cdot\,3.39\,\cdot\,10^{13}}{6.67\,\cdot\,10^{-11}} = 5.39\,\cdot 10^{24}\,kg$$

La massa dell'astronauta sulla Terra è di 70.0 kg, il suo peso sul pianeta sarà quindi P = 742 N

37. KA

L'accelerazione di gravità è data dalla relazione: $g = G\,\frac{M}{R^2}$ e per i due pianeti vale:

$$g_b = \frac{6.674\cdot 10^{-11}\cdot 51\cdot 5.97\cdot 10^{24}}{(0.52\cdot 71.5\cdot 10^6)^2} = 14.7\,m/s^2 \qquad g_c = \frac{6.674\cdot 10^{-11}\cdot 0.012\cdot 1.90\cdot 10^{27}}{(1.23\cdot 6.38\cdot 10^6)^2} = 24.7\,m/s^2$$

L'altezza (h) sulla superfice di Kepler-101c per cui si ha $g_c = 14.7\,m/s^2$ si ottiene dalla relazione:

$$14.7 = G\,\frac{M_c}{(R_c+h)^2}\,; \qquad \text{da cui:} \qquad h = \sqrt{\frac{G\,M_c}{14.7}} - R = \sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 2.28\cdot 10^{25}}{14.7}} - 7.85\,\cdot\,10^6 = 2320\,km$$

38. KA

Poiché l'Apollo 8 ha completato 10 orbite in 20 ore il periodo orbitale era: $P = \frac{20\,h}{10} = 2\,h = 7200\,s$

Dalla III legge di Keplero otteniamo:

$$a = \sqrt[3]{\frac{G\,M_{Luna}\,P^2}{4\,\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.674\cdot 10^{-11}\cdot 7.35\cdot 10^{22}\cdot 51.84\cdot 10^6}{38.48}} = \sqrt[3]{6.60\,\cdot\,10^{18}} = \mathit{1.88}\cdot 10^3\ \mathit{m = 1880\ km}$$

L'altezza (h) dal suolo lunare è: h = a – R_{Luna} = 1880 km – 1738 km = 142 km.

Per calcolare la velocità orbitale ricaviamo la lunghezza di un'orbita e dividiamo per il periodo di rivoluzione:

$$L = 2\,\pi\,a = 11.8\cdot 10^3\ km, \qquad V = \frac{L}{P} = \frac{11.8\cdot 10^3\,km}{7200\,s} = 1.64\,\frac{km}{s}$$

39. KA

Dalla III legge di Keplero il periodo di rivoluzione di un corpo di massa trascurabile intorno a una stella di massa (M) vale: $T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot a^3}{G \cdot M}}$. Il valore minimo si avrà quando: a = R_{TERRA} e M = 1.44 $M_\odot$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 2.594^{20}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 2.87 \cdot 10^{30}}} = 7.31 \text{ s}$$

La lunghezza dell'orbita è: C = 2 π R_{Terra} = 40074 km, la velocità vale: $v = \frac{C}{T} \cong 5480 \frac{km}{s} \cong 0.0183\, c$

40. KA

Il semiasse maggiore vale a = 1.262 UA = 188.8 · 10^6 *km. La velocità media lungo l'orbita è data dalla relazione:* $v_m = \sqrt{\frac{G M_\odot}{a}} = 26.52 \frac{km}{s}$*, mentre la velocità al perielio è:* $v_p = v_m \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = 32.75 \frac{km}{s}$

42. KA

La distanza (D) del satellite dal centro della Terra vale: D = 6378 + 4225 = 10703 km. Possiamo ricavare il suo periodo di rivoluzione siderale (T_s) dalla III legge di Keplero:

$$T_s = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 D^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{39.478 \cdot 1.2261 \cdot 10^{21}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24}}} \cong 11020\, s = 3h\, 3m\, 40s$$

I passaggi successivi del satellite al meridiano di uno stesso luogo avvengono a intervalli di tempo pari al suo periodo sinodico (S) riferito alla rotazione siderale della Terra (T_T = 23h 56m 4s = 86164 s). Se il satellite si muove da Ovest verso Est, ovvero nello stesso senso della rotazione della Terra si ha:

$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_T}$ *ovvero:* : $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\boldsymbol{T_s - T_T}|}$ da cui ricaviamo: $S \cong 12640\, s \cong 3h\, 30m\, 40s$

Se il satellite si muove da Est verso Ovest, ovvero nella direzione opposta della rotazione della Terra:

$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_s} + \frac{1}{T_T}$ *ovvero:* : $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{T_s \cdot T_T}}{|\boldsymbol{T_s + T_T}|}$ da cui ricaviamo: $S \cong 9770\, s = 2h\, 42m\, 50s$

43. KA

Ricaviamo il nuovo periodo di rivoluzione della Terra alla III Legge di Keplero:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{G M_\odot}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.348 \cdot 10^{33}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.00 \cdot 10^{30}}} = 44.5 \cdot 10^6 \text{ s = 515 giorni}$$

Poiché il semiasse dell'orbita resta invariato, la lunghezza del parsec non cambia. Cambia invece la lunghezza di un anno luce: 1 a.l. = 299792 km/s · 44.5 · 10^6 *s = 1.33 ·* 10^{13} *km.* ***Nota:*** *il valore dell'anno luce è definito utilizzando l'Anno Giuliano (=365.25 giorni), mentre nella soluzione si utilizza l'anno siderale, che fornisce comunque una buona approssimazione del valore cercato.*

2. KB

Castore dista dal Sole D = *13.1 pc = 4.05 ·* 10^{14} km. *Possiamo calcolare le dimensioni lineari del semiasse maggiore dell'orbita dalle sue dimensioni apparenti. Poiché il semiasse è perpendicolare alla direzione di osservazione sarà: a = D · tg* β = 1.18 · 10^{10} km. *Dalla III Legge di Keplero ricaviamo:*

$$M + m = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot 1.64 \cdot 10^{39}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 9.33 \cdot 10^{19}} \cong 1.04 \cdot 10^{31} kg \cong 5.23\, M_\odot$$

3. KB

Dalla III Legge di Keplero:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G\,(M_g + m_\odot)}{4\,\pi^2}$$

dove "a" è la distanza del Sole dal centro della Galassia (= 8 kpc = 2.479 · 10^{20} m), "T" il periodo di rivoluzione (= 250 · 10^6 anni = 7.89 · 10^{15} s) e "M_g" la massa della porzione di Galassia contenuta entro un raggio di 8 kpc dal centro. Avremo quindi:

$$M_g + m_\odot = M_g = \frac{4\,\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot T^2} = \frac{39.48 \cdot 1.523 \cdot 10^{61}}{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 6.23 \cdot 10^{31}} \cong 1.45 \cdot 10^{41} kg \cong 72.7 \cdot 10^9\, M_\odot$$

Per ottenere la massa totale $M_{Galassia}$, dobbiamo considerare che, nell'approssimazione fatta, la massa è proporzionale all'area del disco su cui è distribuita. Il raggio della Via Lattea è di circa 50000 anni luce ≅ 15.33 kpc, per cui: $M_{Galassia} : \pi\,(15.33\,kpc)^2 = M_g : \pi\,(8\,kpc)^2$

$$M_{Galalssia} = M_g \left(\frac{15.33}{8}\right)^2 = 5.32 \cdot 10^{41} kg \cong 270 \cdot 10^9\, M_\odot$$

17. KB

In prima approssimazione assumiamo che la materia della galassia sia distribuita in modo uniforme. Inoltre, dal valore della magnitudine assoluta, possiamo stimare il numero di stelle (n) che compongono la galassia partendo dall'ipotesi che siano tutte uguali al Sole. Avremo quindi:

$M_T - M_\odot = -2.5\,log\frac{F_T}{F_\odot} = -2.5\,log\frac{n\,F_\odot}{F_\odot} = -2.5\,log\,n$ *da cui:* $n = 10^{\left(\frac{M_\odot - M_T}{2.5}\right)} = 10 \cdot 10^9$

La massa totale delle stelle della galassia è: M_{stelle} = 10 · 10^9 · 1.99 · 10^{30} = 1.99 · 10^{40} kg. Ma dagli studi sulla dinamica delle galassie a spirale, sappiamo che esiste della materia non visibile (la cosiddetta "materia oscura") della quale misuriamo solo gli effetti gravitazionali. Il rapporto tra la massa della materia oscura e quella delle stelle è dell'ordine di 5.5. Quindi la massa della galassia per gli effetti gravitazionali sarà: $M_{Gravitazionale}$ ~ 6.5 · M_S = 1.29 · 10^{41} kg.

La velocità di fuga vale quindi: $v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.29 \cdot 10^{41}}{1.89 \cdot 10^{21}}} \sim 95000\,\frac{m}{s} = 95\,\frac{km}{s}$

19. KB

La forza di gravità tra le due masse è data dalla relazione:

$$F = G\,\frac{m\,(M-m)}{d^2} = \frac{G}{d^2}\,(mM - m^2)$$

dove il termine $\frac{G}{d^2}$ è costante, mentre il termine $(mM - m^2)$ è una funzione di "m"

m =	*F ∝*
$\frac{M}{8}$	*0.12* M^2
$\frac{M}{6}$	*0.14* M^2
$\frac{M}{4}$	*0.19* M^2
$\frac{M}{2}$	*0.25* M^2
$\frac{M}{1.5}$	*0.22* M^2
$\frac{M}{1.3}$	*0.18* M^2
$\frac{M}{1.2}$	*0.14* M^2

Per determinare il massimo della funzione possiamo usare un criterio algebrico o uno analitico.

Criterio algebrico: consideriamo valori crescenti del rapporto $\frac{M}{n}$ e calcoliamo il corrispondente valore della forza. Dai dati riportati nella tabella a sinistra vediamo che la forza sarà massima quando n = 2, ovvero quando la massa "M" è divisa in due parti uguali.

Criterio analitico: un massimo della funzione $(mM - m^2)$ si ottiene uguagliando a zero la sua derivata prima: $\frac{d}{dm}\,(mM - m^2) = M - 2m = 0;$ *da cui otteniamo che la forza sarà massima quando:* $m = \frac{M}{2}$, *ovvero quando la massa "M" è divisa in due parti uguali*