Olimpiadi Italiane di Astronomia 2019

INAF – Osservatorio Astrofisico di Catania

Corso di preparazione alla Finale Nazionale: Categorie **Junior 1** + **Junior 2 + Senior**

Incontro 5: 29 marzo 2019 - A cura di: Giuseppe Cutispoto e Mariachiara Falco

35. KA

Calcolate il peso di un corpo di massa M = 100 kg all'equatore di Mercurio e all'equatore di Saturno considerando l'effetto della forza centrifuga dovuta alla rotazione. Il periodo di rotazione dei due pianeti è, rispettivamente, di 1407.5 h e 10h 33m. Poiché Saturno non ha una superfice solida, si assuma come distanza dal centro il raggio medio del pianeta.

49. KA

Si consideri una stella di neutroni con massa pari al doppio di quella del Sole e raggio R = 15 km. Calcolare: la densità media della stella, l'accelerazione di gravità sulla sua superfice, la velocità di arrivo al suolo di un corpo che, partendo da fermo, cade da un'altezza h = 2 m dalla superfice, il tempo di caduta del corpo, il peso sulla superfice della Terra di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni, le dimensioni di un cubo di ferro (ρ_{FE} = 7870 kg/m^3) con la stessa massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni.

17. KB

Una galassia a spirale ha una magnitudine assoluta integrata M_T = -20.17 e un raggio di $2 \cdot 10^4$ anni luce. Stimate, in prima approssimazione, la velocità di fuga per un oggetto posto sul piano galattico alla distanza di $2 \cdot 10^5$ anni luce dal centro della galassia. Si assuma che la massa delle stelle sia circa la metà della massa "ordinaria" della galassia.

19. KB

Una massa "M" viene divisa in due parti di massa "m" e "M-m", che vengono allontanate a una distanza "d". Trovare il rapporto m/M che rende massima la forza gravitazionale tra le due parti.

20. KB

Un corpo di piccola massa viene lanciato radialmente dalla superfice di un pianeta, che assumiamo perfettamente sferico, con una velocità pari alla metà della velocità di fuga. Calcolare a che distanza dal centro del pianeta la velocità del corpo si annulla. Trovate una relazione che leghi il rapporto tra la velocità iniziale del corpo e quella di fuga con l'altezza raggiunta.

25. MA

Una stella, che dista dal Sole d = 326 a.l., ha magnitudine apparente m_s= 3.25 e temperatura della fotosfera T_s = 3000 K. Si determini la magnitudine assoluta della stella e il suo raggio in unità di raggi solari e in km. Di che tipo di stella si tratta ?

7. TA

Si considerino due stelle, di magnitudine 3 e 10. Con un telescopio da 20 cm di diametro viene scattata una foto della prima stella, con un tempo di esposizione di 3 secondi. Volendo scattare una foto alla seconda stella, quanto dovrà essere il tempo di esposizione se si vuole che questa appaia, sulla foto, brillante come la prima? Se invece si volesse mantenere lo stesso tempo di esposizione, di quanto dovrebbe cambiare il diametro dell'obiettivo per avere lo stesso risultato ?

16. TA

Due puntatori laser di alta potenza distanti d = 20 m l'uno dall'altro, inviano entrambi un sottilissimo fascio di luce in direzione esattamente verticale. Assumendo la superfice della Terra perfettamente circolare, quale sarà la distanza (h) tra i due fasci a un'altezza dal suolo D = 70 km ?

Soluzioni

35. KA

Detta "g" l'accelerazione di gravità, il peso (P) di un corpo è la forza con cui il corpo è attratto dal pianeta, ovvero la forza di gravità che si esercita tra corpo e pianeta: P = m g. L' accelerazione di gravità e data dalla relazione: $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ *e alla superfice di Mercurio e di Saturno vale:* $g_{Mercurio} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.30 \cdot 10^{23}}{(2440 \cdot 10^3)^2}$ *= 3.70* m s^{-2}; $g_{Saturno} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 5.69 \cdot 10^{26}}{(60267 \cdot 10^3)^2}$ *= 10.4* m s^{-2}. *In assenza di rotazione il peso del corpo sarà quindi:* $P_{Mercurio}$ *= 370 N,* $P_{Saturno}$ *= 1040 N. La forza centrifuga è data dalla relazione:* $F_c = m\,\frac{v^2}{R} = m\,\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$ *e all'equatore è diretta in senso opposto alla gravità. Per i due pianeti avremo:* $F_{cm} = 100\ \frac{39.48 \cdot 2440 \cdot 10^3}{25.67 \cdot 10^{12}} = 3.75\ \cdot 10^{-4}\ N$ *e* $F_{cs} = 100\ \frac{39.48 \cdot 60267 \cdot 10^3}{144.2 \cdot 10^7} = 165\ N$. *Nel caso di Mercurio il peso resta praticamente invariato, mentre nel caso di Saturno il peso sarà:* $P_{Saturno}$ *= 875 N*

49. KA

La densità media è data da: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\ M}{4\ \pi\ R^3} = \frac{3 \cdot 3.98 \cdot 10^{30}}{12.57 \cdot 3.375^{12}} \cong 2.81\ \cdot\ 10^{17}\ \frac{kg}{m^3} \cong 2.81\ \cdot\ 10^{11}\ \frac{kg}{cm^3}$

L'accelerazione di gravità sulla superfice è data da:

$$a_g = \frac{G\ M}{R^2} = \frac{6.674\ \cdot\ 10^{-11}\ \cdot 3.98\ \cdot\ 10^{30}}{225\ \cdot\ 10^6} \cong 1.18\ \cdot\ 10^{12}\ \frac{m}{s^2}$$

La velocità di arrivo al suolo, con partenza da fermo, assumendo costante l'accelerazione di gravità e:

$$v = \sqrt{2\ a_g\ h} = \sqrt{2\ \cdot\ 1.18\ \cdot\ 10^{12} \cdot 2} \cong 2.17\ \cdot\ 10^6\ \frac{m}{s} = 2.17\ \cdot\ 10^3\ \frac{km}{s}$$

Il tempo della caduta è dato dalla relazione:

$$t = \sqrt{\frac{2\ h}{a}} = \sqrt{\frac{4}{1.18\ \cdot\ 10^{12}}} \cong 1.84\ \cdot\ 10^{-6}\ s$$

La massa di 1 cm^3 di materia della stella di neutroni vale: $M = V\ \rho = 2.81\ \cdot\ 10^{11}\ kg$, *il suo peso sulla superfice della Terra è:* $P = M\ a_g \cong 2.81\ \cdot\ 10^{11}\ \cdot 9.807 \cong 27.6\ \cdot\ 10^{11}\ N$

Poiché 1 m^3 *di ferro ha una massa di 7870 kg, per avere una massa* $M_{FE} = 2.81\ \cdot\ 10^{11}\ kg$, *avremo bisogno di un cubo con lato:* $L = \sqrt[3]{\frac{2.81 \cdot 10^{11}}{7870}} \cong 329\ m$

17. KB

In prima approssimazione assumiamo che la materia della galassia sia distribuita in modo uniforme. Inoltre, dal valore della magnitudine assoluta, possiamo stimare il numero di stelle (n) che compongono la galassia partendo dall'ipotesi che siano tutte uguali al Sole. Avremo quindi:

$M_T - M_\odot = -2.5\,log\frac{F_T}{F_\odot} = -2.5\,log\frac{n\,F_\odot}{F_\odot} = -2.5\,log\,n$ *da cui:* $n = 10^{\left(\frac{M_\odot - M_T}{2.5}\right)} = 10\ \cdot\ 10^9$

La massa totale delle stelle della galassia è quindi: M_{stelle} *=* $10 \cdot 10^9 \cdot 1.99 \cdot 10^{30} = 1.99 \cdot 10^{40}$ *kg. Quindi la massa totale della materia "ordinaria" della galassia vale:* $M_{totale} = 2 \cdot M_{stelle} = 3.98 \cdot 10^{40}$ *kg. Ma dagli studi sulla dinamica delle galassie a spirale, sappiamo che esiste della materia non visibile, la cosiddetta "materia oscura", della quale misuriamo solo gli effetti gravitazionali. La materia oscura contribuisce per circa 84% della massa totale delle galassie. Quindi la massa della galassia per gli effetti gravitazionali sarà:* $M_{Gravitazionale} \sim 6.25 \cdot M_{totale} = 2.49 \cdot 10^{41}$ *kg.*

La distanza a cui vogliamo calcolare la velocità di fuga è circa 10 volte il raggio della galassia. Facciamo quindi l'ipotesi che tutta la massa della galassia, inclusa quella oscura, sia all'interno. La velocità di fuga vale quindi:

$$v_f = \sqrt{\frac{2\ G\ M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 2.49 \cdot 10^{41}}{1.89 \cdot 10^{21}}} \sim 133000\ \frac{m}{s} = 133\ \frac{km}{s}$$

19. KB

La forza di gravità tra le due masse è data dalla relazione:

$$F = G\,\frac{m\,(M-m)}{d^2} = \frac{G}{d^2}\,(mM - m^2)$$

dove il termine $\frac{G}{d^2}$ *è costante, mentre il termine* $(mM - m^2)$ *è una funzione di "m"*

m =	*F ∝*
$\frac{M}{8}$	*0.109* M^2
$\frac{M}{6}$	*0.139* M^2
$\frac{M}{4}$	*0.188* M^2
$\frac{M}{2.1}$	*0.249* M^2
$\frac{M}{2}$	*0.250* M^2
$\frac{M}{1.9}$	*0.249* M^2
$\frac{M}{1.5}$	*0.222* M^2
$\frac{M}{1.3}$	*0.178* M^2
$\frac{M}{1.2}$	*0.139* M^2

Per determinare il massimo della funzione possiamo usare un criterio algebrico o uno analitico.

Criterio algebrico: calcoliamo la forza ponendo m = $\frac{M}{n}$ *per valori decrescenti di n:*

$$F = \frac{G}{d^2}\,\frac{(n-1)\,M^2}{n^2}$$

Dai dati riportati nella tabella a sinistra vediamo che la forza sarà massima quando n = 2, ovvero quando la massa "M" è divisa in due parti uguali.

Criterio analitico: un massimo della funzione $(mM - m^2)$ *si ottiene uguagliando a zero la sua derivata prima:* $\frac{d}{dm}\,(mM - m^2) = M - 2m = 0;$ *da cui otteniamo che la forza sarà massima quando:* $m = \frac{M}{2}$*, ovvero quando la massa "M" è divisa in due parti uguali*

20. KB

Scriviamo la legge di conservazione dell'energia meccanica indicando con R il raggio del pianeta di massa M, con m la massa del corpo e con H la distanza dal centro del pianeta in cui la velocità del corpo si annulla. Poiché la velocità di fuga è data dalla relazione $v_f = \sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}$*, avremo:*

$$\frac{1}{2}\,m\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

$$\frac{1}{4}\,\frac{G\,M\,m}{R} - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui ricaviamo: $\frac{1}{4\,R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ *ovvero:* $-\frac{3}{4R} = -\frac{1}{H}$ *ed infine:* $H = \frac{4}{3}\,R$

Indichiamo con K il rapporto tra la velocità con cui viene lanciato il corpo e la velocità di fuga:

$$K = \frac{v}{v_f} \qquad \text{con: } 0 \le v \le v_f$$

La legge di conservazione dell'energia meccanica assume la forma:

$$\frac{1}{2}\,m\left(K\sqrt{\frac{2\,G\,M}{R}}\right)^2 - \frac{G\,M\,m}{R} = 0 - \frac{G\,M\,m}{H}$$

da cui ricaviamo: $\frac{K^2}{R} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{H}$ *e infine:* $H = \frac{R}{1-K^2}$

Per K = ½ otteniamo il valore: $H = \frac{4}{3}\,R$*, se v = 0 avremo K = 0 e quindi H=R, mentre se* $v = v_f$ *avremo K =1 e il corpo raggiungerà una distanza infinita dal pianeta.*

25. MA

La magnitudine assoluta della stella è data dalla relazione $M_s = m + 5 - 5 \log d$ = -1.75. Dalla relazione $M_{\odot} - M_S = -2.5 \log\left(\frac{L_{\odot}}{L_S}\right)$ *ricaviamo:* $-2.632 = \log\left(\frac{L_{\odot}}{L_S}\right)$ *e infine:* $L_s = 429\ L_{\odot}$

Dalla legge di Stefan-Boltzmann otteniamo:

$4\,\pi\, R_S^{\ 2}\, \sigma\, T_S^{\ 4} = 429\ \cdot\ 4\,\pi\, R_{\odot}^{\ 2}\, \sigma\, T_{\odot}^{\ 4}$ e quindi: $R_S = R_{\odot}\sqrt{429\left(\frac{5778}{3000}\right)^4} \cong 76.8\, R_{\odot} \cong 53.4\ \cdot 10^6\ km$

La stella è una gigante rossa.

7. TA

La differenza di magnitudine tra le due stelle è di sette magnitudini e quindi:

$$m_1 - m_2 = -7 = -2.5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \text{ da cui segue: } \frac{F_1}{F_2} = 10^{\frac{-7}{-2.5}} \cong 631$$

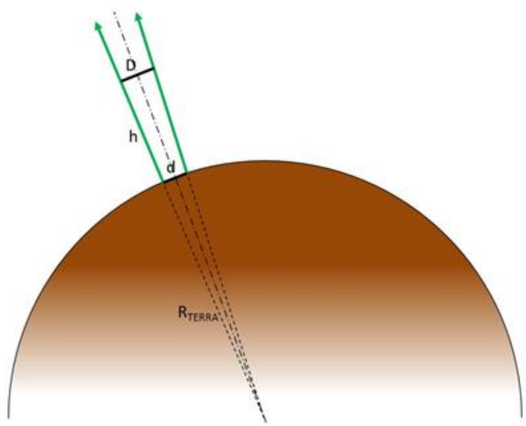
Se vogliamo che la seconda stella risulti luminosa come la prima dobbiamo ricevere lo stesso flusso. Occorrerà quindi aumentare il tempo di esposizione di un fattore pari al rapporto tra i flussi delle due stelle e quindi se T_1 = 3 s si avrà T_2 = 1893 s.

Se invece si vuole cambiare il diametro dell'obiettivo, si deve moltiplicare l'area del telescopio usato per fotografare la prima stella per il fattore 631. Poiché l'area di un telescopio è proporzionale al quadrato del raggio si avrà:

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 631 \qquad \text{da cui si ricava:} \qquad R_2 = \sqrt{631}\, R_1 \cong 25.1\, R_1$$

Quindi occorrerebbe un telescopio con uno specchio di poco più di 2.5 m di diametro

16. TA



Poiché i due laser puntano esattamente in verticale, i loro ipotetici prolungamenti all'indietro, cioè verso l'interno della Terra, si incontrerebbero esattamente al centro del nostro pianeta.

Essendo "d" e "h" piccoli rispetto a R_{Terra} si ha quindi a che fare con due triangoli simili, per i quali si può scrivere:

$$R_{TERRA} : d = (R_{TERRA} + h) : D$$

Da cui ricaviamo:

$$D = \frac{(R_{Terra}+h)\cdot d}{R_{Terra}} = \frac{6448 \cdot 10^3 \cdot 20}{6378 \cdot 10^3} = 20.22\ m$$